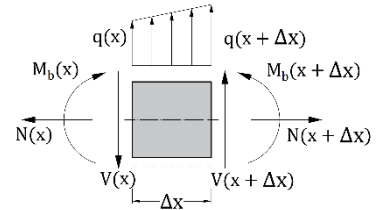
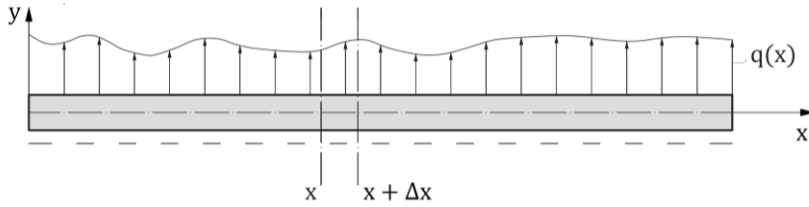


FORMULARIO - SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

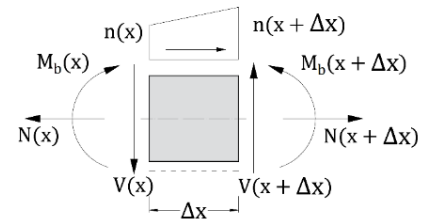
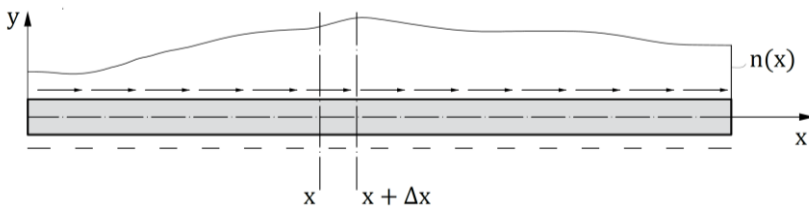
1) Equazioni differenziali di equilibrio



Convenzioni sui segni: $q(x) > 0$ se nella stessa direzione dell'asse y

$$\frac{dV}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM_b}{dx} = -V(x)$$



Convenzioni sui segni: $n(x) > 0$ se nella stessa direzione dell'asse x

$$\frac{dN}{dx} = -n(x)$$

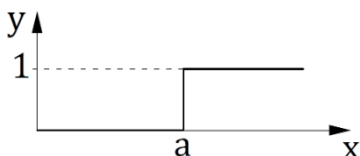
2) Funzioni di singolarità

$$f_n(x) := \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ (x - a)^n & \text{se } x > a \end{cases}$$

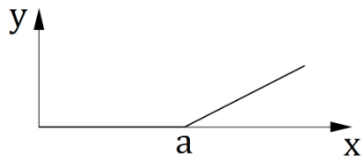
$$\frac{d}{dx} (\langle x - a \rangle^n) = n \langle x - a \rangle^{n-1}$$

$$\int_{-\infty}^x \langle t - a \rangle^n dt = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1}$$

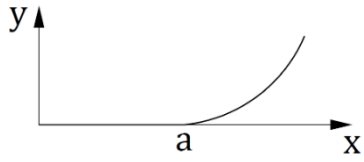
esempi:



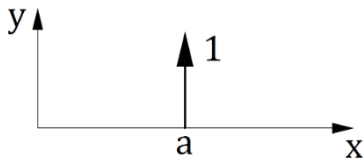
$$f_0(x) \langle x - a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq a \\ (x - a)^0 = 1 & \text{per } x > a \end{cases}$$



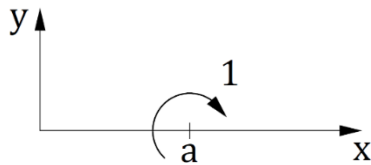
$$f_1(x) \langle x - a \rangle^1 = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq a \\ (x - a) & \text{per } x > a \end{cases}$$



$$f_2(x) \langle x - a \rangle^2 = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq a \\ (x - a)^2 & \text{per } x > a \end{cases}$$



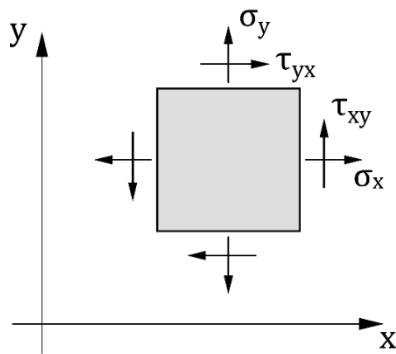
$$f_{-1}(x) = \langle x - a \rangle^{-1} = \frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^0$$



$$f_{-2}(x) = \langle x - a \rangle^{-2} = \frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^{-1}$$

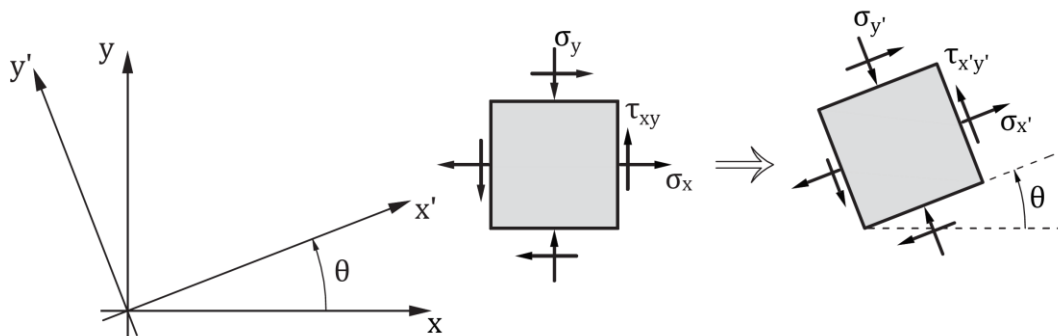
N.B.: per evidenziare il segno negativo, l'esponente si pone come pedice e non come apice

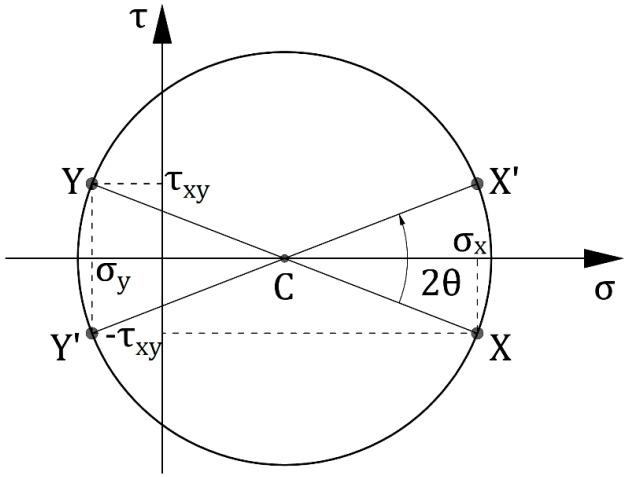
3) Stati piani di tensione



$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} \end{cases}$$

4) Circonferenza di Mohr





$$X \equiv (\sigma_x, \tau_{xy}) , Y \equiv (\sigma_y, -\tau_{xy})$$

$$C \equiv \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

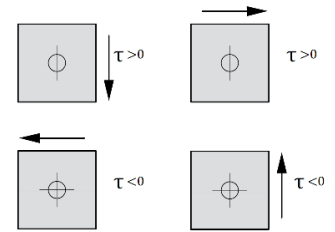
Se ruoto il diametro XY di 2θ ottengo il diametro X'Y'

$$X' \equiv (\sigma_{x'}, \tau_{xy}') , Y' \equiv (\sigma_{y'}, -\tau_{xy}')$$

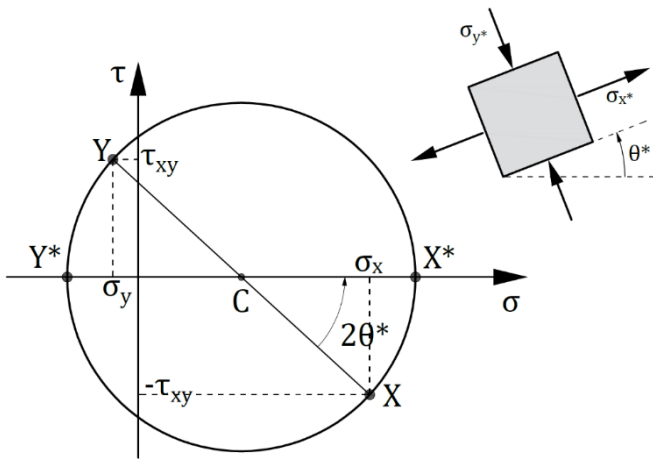
[OSS. :il diametro deve ruotare dell'angolo doppio rispetto all'elemento]

Convenzioni sui segni: $\sigma > 0$ se di trazione

$\tau > 0$ se produce rotazioni orarie rispetto alla materia



Direzioni principali di tensione e tensioni principali



$$\sigma_{x^*} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R$$

$$\sigma_{y^*} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$$

$$tg 2\theta^* = \left| \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right|$$

5) Relazioni costitutive

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) + \epsilon_x^t$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \epsilon_y^t$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) + \epsilon_z^t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

E: modulo di Young o modulo di elasticità normale

ν : coefficiente di contrazione laterale di Poisson

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$: modulo di elasticità tangenziale

$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha (T - T_0)$ effetto di una variazione termica con $\alpha > 0$ coefficiente di dilatazione ($12 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ per l'acciaio, $24 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ per l'alluminio), T temperatura attuale del corpo, T_0 temperatura di riferimento

$K = \frac{E}{1-2\nu}$: modulo di Kelvin o modulo volumetrico

6) Criteri di resistenza

- Criterio di von Mises (o della massima energia di distorsione)

a) Caso triassiale: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tensioni principali

condizione di non crisi $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \sigma_y$

b) Caso biassiale: $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$

condizione di non crisi $\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]} \leq \sigma_y$

c) Stato tensionale alla de Saint-Venant: $\sigma_x \neq 0, \tau_{xy} \neq 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0$ (asse z è principale)

condizione di non crisi $\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_y$

- Criterio di Tresca (o della massima tensione tangenziale)

a) Caso triassiale: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tensioni principali

condizione di non crisi $\sigma_T = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} \leq \sigma_y$

b) Caso biassiale: $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$

condizione di non crisi $\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leq \sigma_y$

c) Stato tensionale alla de Saint-Venant: $\sigma_x \neq 0, \tau_{xy} \neq 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0$ asse z è principale)

condizione di non crisi $\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_y$

• Criterio di Galileo (o della massima tensione normale)

a) Caso triassiale: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tensioni principali

$$\text{condizione di non crisi} \quad \sigma_G = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} \leq \sigma_y$$

b) Caso biassiale: $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$

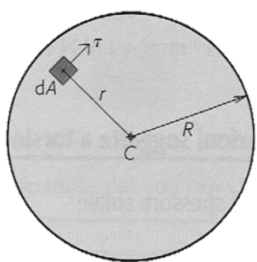
$$\text{condizione di non crisi} \quad \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} \leq \sigma_y$$

c) Stato tensionale alla de Saint-Venant: $\sigma_x \neq 0, \tau_{xy} \neq 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_y = \sigma_z = 0$ (asse z è principale)

$$\text{condizione di non crisi} \quad \max \left\{ \left| \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right|, \left| \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right| \right\} \leq \sigma_y$$

7) Sollecitazione di torsione

• Sezioni circolari



$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{G I_0}$$

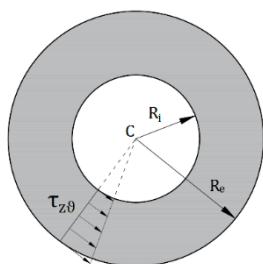
$\varphi(z)$: angolo di torsione della sezione z

$\Theta = \frac{\Phi}{L}$ angolo unitario di torsione con Φ (angolo di torsione)

L lunghezza trave

I_0 momento di inerzia polare

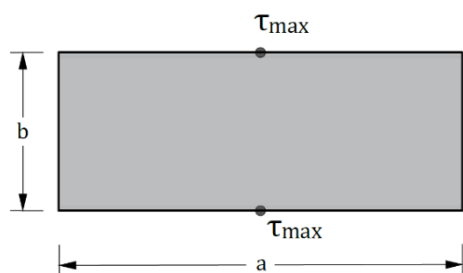
$\tau_{z\vartheta} = \frac{M_t}{I_0} r$ (andamento tensioni tangenziali lungo il raggio)



piene: $\tau_{max} = \frac{M_t}{I_0} R$

cave: $\tau_i = \frac{M_t}{I_0} R_i$, $\tau_e = \frac{M_t}{I_0} R_o$

• Sezioni rettangolari ($a > b$)



$$\tau_{y\vartheta \max} = c_1 \frac{M_t}{a b^2}$$

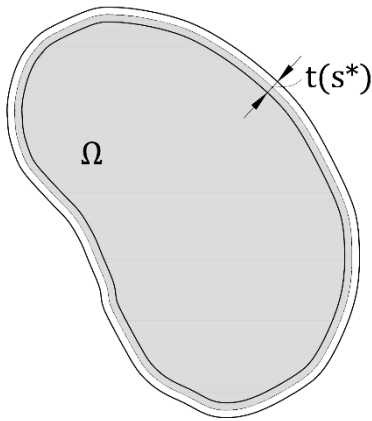
$$\frac{M_t}{\Phi} = c_2 \frac{G a b^3}{L}$$

$$I_t = c_2 a b^3$$

a/b	c ₁	c ₂
1	4,81	0,141
1,5	4,33	0,196
2	4,06	0,229
3	3,74	0,263
5	3,44	0,291
10	3,20	0,312
∞	3	0,333

per $a/b > 10$ (rettangolo sottile): $\tau_{y\vartheta \max} = 3 \frac{M_t}{a b^2}$, $\frac{M_t}{\Phi} = \frac{G}{L} \frac{1}{3} a b^3$, $I_t = \frac{1}{3} a b^3$

- Sezioni cave con parete sottile (formula di Bredt)



$$\tau_{ts}(s^*) = \frac{M_t}{2 \Omega t(s^*)}$$

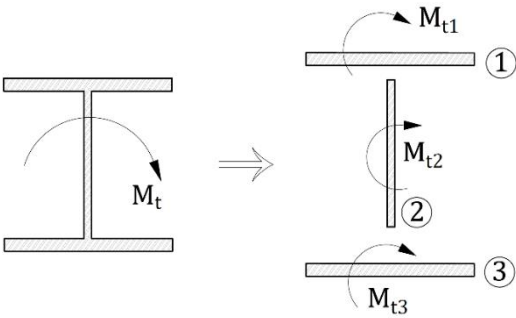
Ω : area racchiusa dalla linea media

$t(s^*)$: spessore della sezione in corrispondenza dell'ascissa curvilinea s^*

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{G I_t} \quad \text{con} \quad I_t = \frac{4 \Omega^2}{\int_{\Gamma} \frac{1}{t(s^*)} ds^*}$$

per $t=\text{cost} \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{1}{t(s^*)} ds^* = \frac{L_m}{t}$, con L_m lunghezza della linea media

- Profili composti



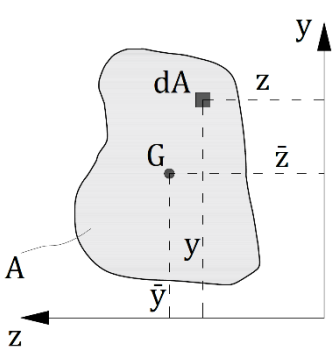
$$M_t = M_{t1} + M_{t2} + M_{t3}$$

$$I_{tot} = I_{t1} + I_{t2} + I_{t3}$$

$$M_{t1} = \frac{M_t}{I_{tot}} I_{t1}, M_{t2} = \frac{M_t}{I_{tot}} I_{t2}, M_{t3} = \frac{M_t}{I_{tot}} I_{t3}$$

$$\tau_i = c_1 \frac{M_{ti}}{a_i b_i^2}$$

8) Geometria delle aree



$S_z = \int_A y dA$ momento statico dell'area rispetto all'asse z

$S_y = \int_A z dA$ momento statico dell'area rispetto all'asse y

Coordinate del baricentro: $\bar{z} = \frac{\int_A z dA}{A}$, $\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{A}$

Nel caso di figure composte di cui conosco il baricentro delle n -parti:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

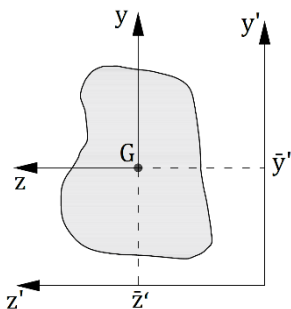
Teorema degli assi paralleli (o di Huygens-Steiner):

se z e y assi baricentrici

$$I_{z'z'} = I_{zz} + A \bar{y}'^2$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} + A \bar{z}'^2$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} + A \bar{y}' \bar{z}'$$



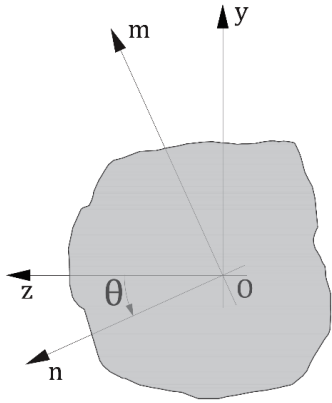
con

$$I_{zz} = \int_A y^2 dA \quad \text{momento di inerzia rispetto all'asse } z$$

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA \quad \text{momento di inerzia rispetto all'asse } y$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA \quad \text{momento di inerzia centrifugo}$$

Teorema di rotazione degli assi e rappresentazione di Mohr



$$I_{nn} = I_{zz} \cos^2 \theta + 2 I_{yz} \sin \theta \cos \theta + I_{yy} \sin^2 \theta$$

$$I_{mm} = I_{zz} \sin^2 \theta - 2 I_{yz} \sin \theta \cos \theta + I_{yy} \cos^2 \theta$$

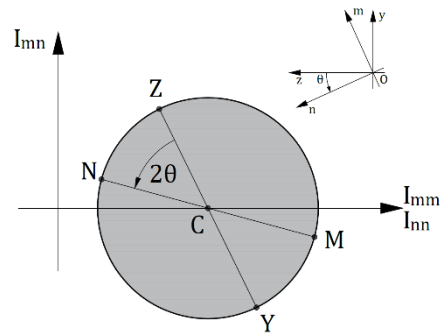
$$I_{mn} = -(I_{zz} - I_{yy}) \sin \theta \cos \theta + I_{yz} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$Y \equiv (I_{zz}, -I_{yz}), Z \equiv (I_{yy}, I_{yz})$$

$$\rightarrow M \equiv (I_{nn}, -I_{mn}), N \equiv (I_{mm}, I_{mn})$$

$$C \equiv \left(\frac{I_{yy} + I_{zz}}{2}, 0 \right) \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_{yy} - I_{zz}}{2} \right)^2 + I_{yz}^2}$$

[OSS: il diametro deve ruotare dell'angolo doppio rispetto all'elemento]



Assi principali di inerzia e direzioni principali

$$Y^* = \left(\frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + R, 0 \right) \equiv (I_{z^*z^*}, 0)$$

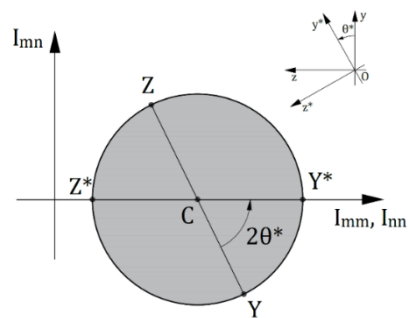
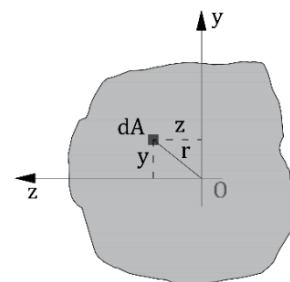
$$Z^* = \left(\frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} - R, 0 \right) \equiv (I_{y^*y^*}, 0)$$

$$\tan 2\theta^* = \left| \frac{2 I_{yz}}{I_{zz} - I_{yy}} \right|$$

$$I_{y^*z^*} = \int_A y^* z^* dA = 0$$

Momento di inerzia polare

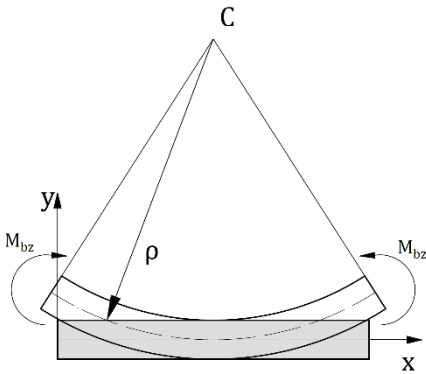
$$I_r = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_{zz} + I_{yy}$$



Momenti di inerzia di figure piane notevoli

Rettangolo		$\begin{aligned} \bar{i}_{x'} &= \frac{1}{12}bh^3 \\ \bar{i}_{y'} &= \frac{1}{12}b^3h \\ I_x &= \frac{1}{3}bh^3 \\ I_y &= \frac{1}{3}b^3h \\ J_C &= \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2) \end{aligned}$
Triangolo		$\begin{aligned} \bar{i}_{x'} &= \frac{1}{36}bh^3 \\ I_x &= \frac{1}{12}bh^3 \end{aligned}$
Cerchio		$\begin{aligned} \bar{i}_x = \bar{i}_y &= \frac{1}{4}\pi r^4 \\ J_O &= \frac{1}{2}\pi r^4 \end{aligned}$
Semicerchio		$\begin{aligned} I_x = I_y &= \frac{1}{8}\pi r^4 \\ J_O &= \frac{1}{4}\pi r^4 \end{aligned}$
Quarto di cerchio		$\begin{aligned} I_x = I_y &= \frac{1}{16}\pi r^4 \\ J_O &= \frac{1}{8}\pi r^4 \end{aligned}$
Ellisse		$\begin{aligned} \bar{i}_x &= \frac{1}{4}\pi ab^3 \\ \bar{i}_y &= \frac{1}{4}\pi a^3b \\ J_C &= \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2) \end{aligned}$

9) Stato di sforzo conseguente alla flessione



$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{bz}}{E I_{zz}}$ relazione tra curvatura della fibra neutra e momento applicato

$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$

$\sigma_x = -\frac{M_{bz}}{I_{zz}} y$ Formula di Navier

Espressione generale formula di Navier (caso di assi non principali e presenza di sforzo normale)

$$\sigma_x = -\frac{(y I_{yy} - z I_{yz}) M_{bz} + (y I_{yz} - z I_{zz}) M_{by}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} + \frac{N}{A}$$

Con y e z assi principali (e presenza di sforzo normale)

$$\sigma_x = -\frac{y}{I_{zz}} M_{bz} + \frac{z}{I_{yy}} M_{by} + \frac{N}{A}$$

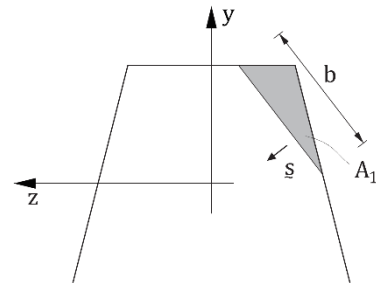
Oss. : M_{by} tende le fibre $z > 0 \rightarrow \sigma_x > 0$ per $z > 0$

M_{bz} tende le fibre $y < 0 \rightarrow \sigma_x > 0$ per $y < 0$

10) Formula generale di Jourawski

$\bar{\tau}_{sx} = -\frac{VQ}{I_{zz} b}$ con $Q = \int_{A_1} y dA$

convenzione sui segni: $\bar{\tau}_{sx} > 0$ se ha lo stesso verso della normale esterna all'area A_1 (flusso uscente)

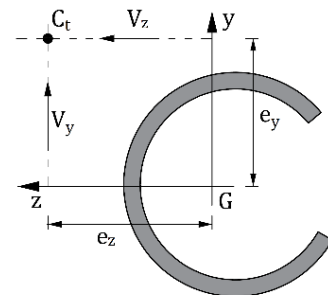


Caso con $M_{by} = 0$ e $V_z = 0$: $q_{xs} = q_{xs} = \bar{\tau}_{sx} b = \frac{-V_y}{I_{zz} I_{yy} - I_{yz}^2} (I_{yy} \int_{A_1} y dA - I_{yz} \int_{A_1} z dA)$

Caso con $M_{bz} = 0$ e $V_y = 0$: $q_{xs} = q_{xs} = \bar{\tau}_{sx} b = \frac{-V_z}{I_{zz} I_{yy} - I_{yz}^2} (I_{zz} \int_{A_1} z dA - I_{yz} \int_{A_1} y dA)$

Centro di taglio: punto dove passa la risultante delle tensioni tangenziali dovute alle sollecitazioni taglianti V_y e V_z .

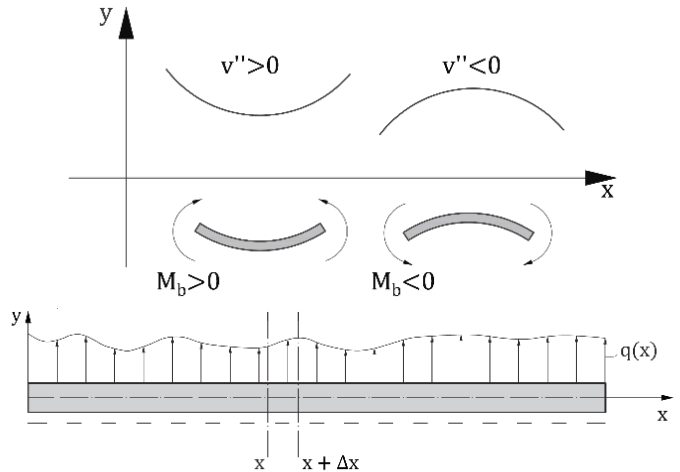
Se $G \neq C_t$ si ha torsione $\rightarrow M_t = V_y e_z - V_z e_y$



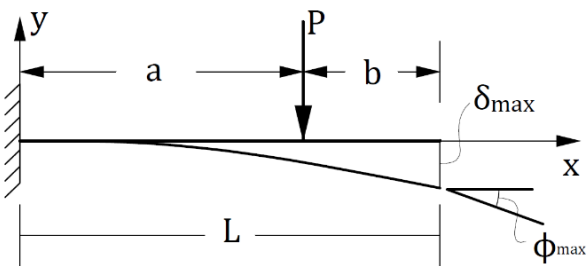
11) Deformazione dovuta alla flessione

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M_b}{EI}$$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

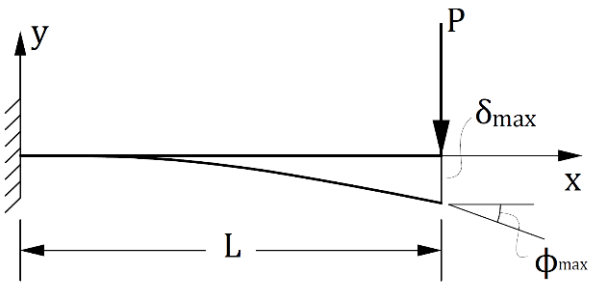


Casi notevoli



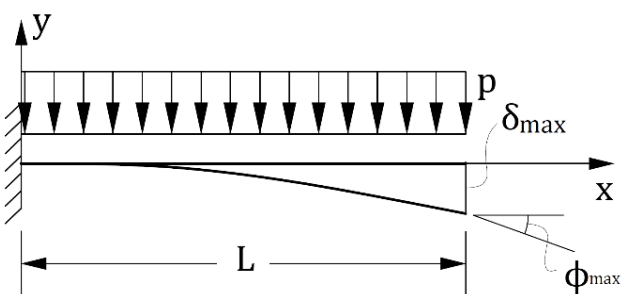
$$v(x) = \frac{P}{6EI} ((x-a)^3 - x^3 + 3x^2 a)$$

$$\delta_{max} = \frac{P a^2 (3L-a)}{6EI}, \quad \phi_{max} = \frac{P a^2}{2EI}$$



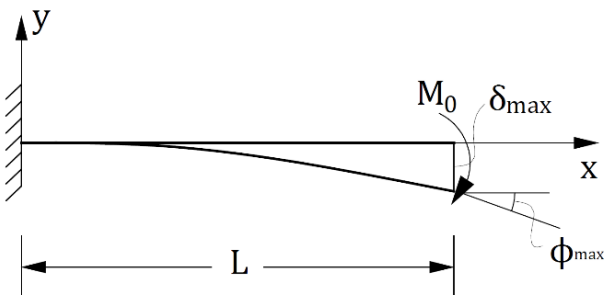
$$v(x) = \frac{P}{6EI} (-x^3 + 3x^2 L)$$

$$\delta_{max} = \frac{P L^3}{3EI}, \quad \phi_{max} = \frac{P L^2}{2EI}$$



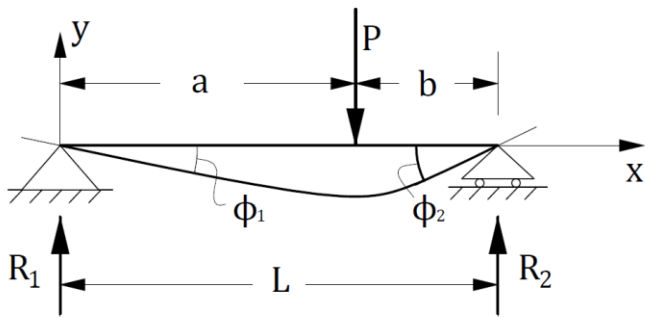
$$v(x) = \frac{p x^2}{24EI} (x^2 + 6L^2 - 4Lx)$$

$$\delta_{max} = \frac{p L^4}{8EI}, \quad \phi_{max} = \frac{p L^3}{6EI}$$



$$v(x) = \frac{M_0 x^2}{2EI}$$

$$\delta_{max} = \frac{M_0 L^2}{2EI}, \quad \phi_{max} = \frac{M_0 L}{EI}$$

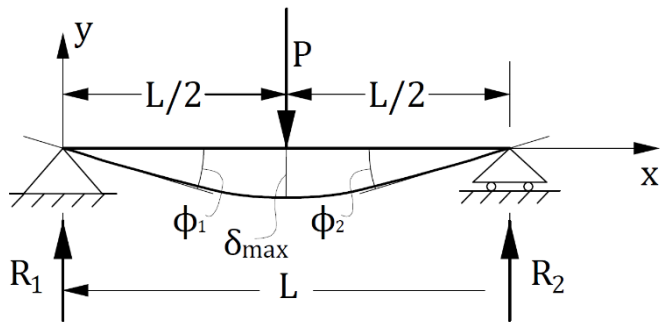


$$v(x) = \frac{P b}{6 L E I} \left(\frac{L}{b} \langle x - a \rangle^3 - x^3 + (L^2 - b^2) x \right)$$

$$\delta_{max} = \frac{P b (L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3} L E I} \quad \text{per } x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

$$\phi_1 = \frac{P a b (2L - a)}{6 L E I}, \quad \phi_2 = \frac{P a b (2L - b)}{6 L E I}$$

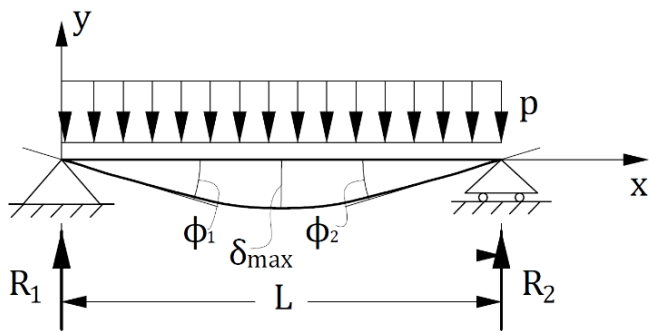
$$R_1 = \frac{P b}{L}, \quad R_2 = \frac{P a}{L}$$



$$v(x) = \frac{P}{12 E I} \left(2 \langle x - \frac{L}{2} \rangle^3 - x^3 + \frac{3 L^2}{4} x \right)$$

$$\delta_{max} = \frac{P L^3}{48 E I}$$

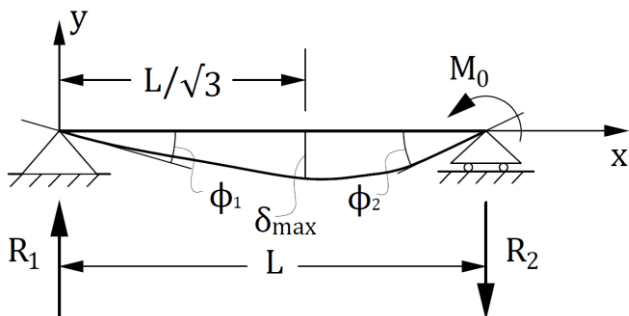
$$\phi_2 = \phi_1 = \frac{P L^2}{16 E I}, \quad R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$



$$v(x) = \frac{p x}{24 E I} (L^3 - 2 L x^2 + x^3)$$

$$\delta_{max} = \frac{5 p L^4}{384 E I}, \quad \phi_2 = \phi_1 = \frac{p L^3}{24 E I}$$

$$R_1 = R_2 = \frac{p L}{2}$$

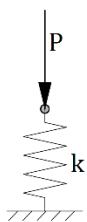


$$v(x) = \frac{M_0 L x}{6 E I} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right)$$

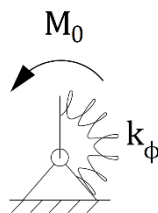
$$\delta_{max} = \frac{M_0 L^2}{9\sqrt{3} E I} \quad \text{per } x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\phi_1 = \frac{M_0 L}{6 E I}, \quad \phi_2 = \frac{M_0 L}{3 E I}, \quad R_1 = R_2 = \frac{M_0}{L}$$

Vincoli elastici cedevoli

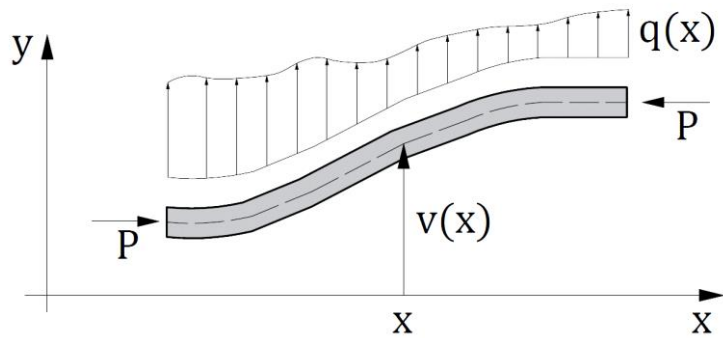


$$\delta = \frac{P}{k}$$

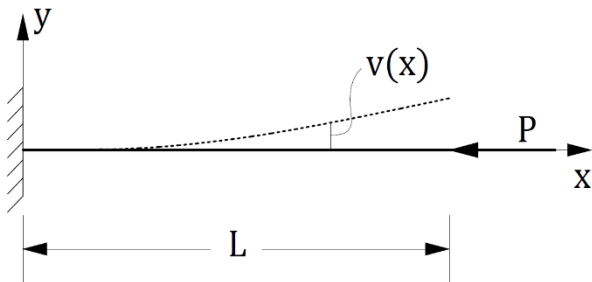


$$\phi = \frac{M_0}{k_\phi}$$

12) Stabilità dell'equilibrio elastico di travi compresse



$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = q(x)$$



$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$v(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_4 \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x$$

Lunghezza libera di inflessione

$$P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2}$$

